

El estudio de los sistemas dinámicos ha sido uno de los campos más fructíferos de la física en las últimas décadas. Este libro, escrito por dos de los principales investigadores en esta área, ofrece una introducción rigurosa y actualizada a este fascinante mundo. El texto comienza con los fundamentos de la mecánica clásica y avanza hacia temas más complejos como el caos, la teoría de bifurcaciones y los sistemas dinámicos no lineales. El lenguaje es claro y accesible, pero sin perder de vista el rigor científico. Este libro es esencial para cualquier estudiante de física o matemáticas que quiera profundizar en estos temas.

Gustavo Martínez Mekler

Físico por la Facultad de Ciencias de la UNAM y doctor en física por la Universidad de Manchester. Es investigador del Centro de Ciencias Físicas de la UNAM en Cuernavaca. Es miembro del SNI.

Germinal Cocho

Es doctor en ciencias por la Universidad de Princeton e investigador titular "C" en el Instituto de Física de la UNAM y profesor de asignatura en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Perteneció al SNI. Obtuvo el Premio Universidad Nacional por Investigación en Ciencias Exactas.

APRENDER



Ciencias de la materia:
génesis y evolución de sus conceptos fundamentales

Al borde del milenio: caos, crisis, complejidad



Gustavo Martínez Mekler y Germinal Cocho

ISBN 968-36-750



9 789683 675040



CEIICH-UNAM

AL BORDE DEL MILENIO: CAOS CRISIS 1



VDA-1

AL BORDE DEL MILENIO:
CAOS, CRISIS, COMPLEJIDAD

Videoteca de Ciencias y Humanidades

Colección

Aprender a Aprender

Serie

Ciencias de la Materia: Génesis y Evolución
de sus Conceptos Fundamentales

COORDINADORES DE ÁREAS Y ESPECIALIDADES:

Luis de la Peña
CIENCIAS DE LA MATERIA

Pablo Rudomin
CIENCIAS DE LA VIDA

Pablo González Casanova
CIENCIAS HUMANAS

Rolando García
TEORÍA Y METODOLOGÍA

Beatriz Garza Cuarón
CIENCIAS DEL LENGUAJE

Raymundo Bautista
MATEMÁTICAS

Hugo Aréchiga
CIENCIAS DE LA SALUD

Felipe Lara Rosano
INGENIERÍAS Y TECNOLOGÍAS

AL BORDE DEL MILENIO:
CAOS, CRISIS, COMPLEJIDAD

Gustavo Martínez Mekler
y
Germinal Cocho



Universidad Nacional Autónoma de México

Centro de Investigaciones Interdisciplinarias
en Ciencias y Humanidades
Coordinación de Humanidades
México, 1999

GUSTAVO MARTÍNEZ MEKLER

Es físico por la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México y doctor en física por la Universidad de Manchester, Inglaterra. Fue fundador y primer jefe del Departamento de Sistemas Complejos del Instituto de Física de la UNAM. Su área de trabajo está relacionada con la física estadística, los sistemas dinámicos y complejidad, con un enfoque interdisciplinario entre física, biología y matemáticas. Actualmente es investigador del Centro de Ciencias Físicas de la UNAM en Cuernavaca. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores.

GERMINAL COCHO

Es doctor en ciencias por la Universidad de Princeton, New Jersey. En la Universidad Nacional Autónoma de México es investigador titular "C" del Instituto de Física; profesor de asignatura y miembro del Programa de Ciencia y Sociedad de la Facultad de Ciencias. Sus principales disciplinas son las partículas elementales, biofísica y biología teórica. En 1990, obtuvo el Premio Universidad Nacional por Investigación en Ciencias Exactas. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores.

Primera edición, 1999

Edición científica:

Rogelio López Torres

Diseño de portada:

Ángeles Alegre Schettino y Lorena Salcedo Bandala

D.R. © 1999

Universidad Nacional Autónoma de México
Centro de Investigaciones Interdisciplinarias
en Ciencias y Humanidades
Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.

Impreso en México/Printed in Mexico

ISBN: 968-36-7504-2

AL BORDE DEL MILENIO:
CAOS, CRISIS, COMPLEJIDAD

Algo especial ha de estar pasando con la ciencia ahora que nos encontramos **al borde** del milenio. Si ojeamos los periódicos, sintonizamos el televisor o simplemente nos asomamos por la ventana, vemos que nos encontramos en tiempos de **crisis**, de cambio, de inestabilidad, de **incertidumbre**, ante los cuales tenemos que **adaptarnos**. De situaciones **caóticas** emergen respuestas **colectivas**. Pequeñas inestabilidades precipitan eventos **catastróficos**. Se vive en la **globalización**, todo se encuentra **correlacionado**, se tienden **redes** económicas, se navega en el ciberespacio. Se generan super **estructuras**, los movimientos se **autoorganizan**. Se vive en la **marginalidad**. La sociedad se ve tan **compleja**. Bueno, y este delirio apocalíptico sobre nuestra cotidianidad, ¿qué tiene que ver con la ciencia?

El objetivo de este ensayo es adentrarnos en el significado que tienen las palabras resaltadas en el contexto de la ciencia. Asomarnos, en un vuelo impresionista, a una nueva forma de hacer ciencia, con una novedad impregnada del aroma de la filosofía natural de otros tiempos. Se trata de una experiencia interdisciplinaria que, a pesar de no ser generalizada en el medio, representa una de las puntas de lanza de la investigación más promisorias.

COMPLEJIDAD

En términos más formales, el propósito podría versar acerca de nuestro interés en el estudio de sistemas con muchos componentes que interactúan fuertemente entre sí, dando lugar a la emergencia de una variedad de comportamientos globales que se encuentran interrelacionados. Ejemplos de esta naturaleza abundan en nuestro entorno: los cambios atmosféricos, la bolsa de valores, una célula, la memoria, un flujo turbulento... La evolución temporal de estos sistemas es no lineal, esto es, los efectos no son proporcionales a las causas. Al estudiar su desarrollo resulta que con frecuencia el detalle del comportamiento dinámico de los componentes es irrelevante para la caracterización de las llamadas propiedades emergentes; una clase amplia de situaciones originan el mismo comportamiento colectivo, dando lugar a un grado de universalidad. Se distinguen entonces varios niveles de descripción, aparecen jerarquías y, en cierta medida, se cumple el principio aristotélico de que el todo es mayor que la suma de las partes.¹ ¿Será que nos estamos volviendo anti-reduc-

¹ El premio Nobel de física Murray Gell-Mann se refiere a este tipo de comportamiento al describir los sistemas complejos así: "Una de las características de los sistemas complejos no lineales es que no pueden, en general, ser analizados exitosamente determinando con antelación un conjunto de propiedades o aspectos estudiados separadamente, para luego combinar esos tratamientos parciales en un intento de formar una imagen del todo. En lugar de ello, es necesario observar todo el sistema, aun cuando ello implique tener una visión cruda del mismo, y luego permitir que emerjan del trabajo realizado posibles simplificaciones" (Gell-Mann, 1992). (Aquí y subsecuentemente las traducciones son nuestras.)

El escritor James Gleick puntualizó en una conferencia lo siguiente: "Existen leyes fundamentales de los sistemas complejos, pero son un nuevo tipo de leyes. Son leyes sobre estructura, organización y

cionistas? Frecuentemente, cuando la literatura científica se refiere a este tipo de comportamiento, se habla del estudio de sistemas complejos.² ¿Pero, no les parece que lo que hay en la naturaleza son sistemas en los cuales ocurren procesos, y son éstos los que pueden o no presentar comportamientos complejos? La complejidad viene asociada con el nivel de descripción y con los aspectos estructurales, dinámicos y funcionales en que estemos enfocando nuestra atención. En este sentido, un mismo sistema puede ser catalogado como complejo y simple a la vez. Con este enfoque, la dicotomía holismo-reduccionismo³ se suaviza, pudiéndose plantear una síntesis complementaria. Para ciertos aspectos, el conocimiento detallado de los componentes se

escala, y se desvanecen al enfocarse sobre los componentes del sistema complejo —tal como la psicología de una muchedumbre a punto de realizar un linchamiento se desvanece si uno entrevista en forma individual a los participantes" (Weinberg, 1992).

² No existe (y tal vez nunca existirá) una definición universalmente aceptada de sistema complejo y complejidad. Para una discusión extensa al respecto, véase Grassberger (1991). Durante la última década la investigación y la divulgación sobre sistemas complejos ha sido fuertemente impulsada en Estados Unidos por el Instituto de Santa Fe, cuya labor en publicaciones es muy extensa. Con anterioridad, sistemas con características semejantes a las que hemos mencionado para los sistemas complejos fueron estudiados en el marco de las llamadas estructuras disipativas (estructuras autorganizadas con flujo de materia y energía que se forman muy lejos del equilibrio termodinámico) introducidas por el premio Nobel Ilya Prigogine (Glansdorff, 1971) y en el contexto de la sinérgica (estudio de la acción de muchos subsistemas que dan lugar a estructura y funcionalidad en una escala macroscópica) a lo largo de las líneas propuestas por Hermann Haken (1978). Una introducción en español al estudio de algunos aspectos de los sistemas complejos, con una amplia bibliografía, se encuentra en Martínez Mekler (1993).

³ Para los propósitos de este escrito entendemos por holismo el punto de vista según el cual para el entendimiento del comportamiento del todo no basta el conocimiento del comportamiento de las partes por separado.

trasmisión de un nivel a otro de la jerarquía, para otros es secundario.⁴

Por supuesto, la controversia holismo-reduccionismo, proceso-mecanismo, se ha venido planteando continuamente a lo largo de la historia. ¿Entonces, por qué tanto alboroto ahora? ¿Será porque contamos con las herramientas para poder abordar estudios que antes estaban fuera de nuestro alcance? ¿Serán los tiempos que vivimos, las estructuras sociales, económicas y políticas? ¿Será la sofisticación tecnológica a la que hemos llegado? La respuesta parece ser afirmativa en todos los casos. Veamos ahora con más detenimiento algunos de los conceptos arriba expuestos.

NOLINEALIDAD

Casi todos los fenómenos que observamos en la naturaleza son no lineales, como casi todos los mamíferos son no elefantes. Es claro que en zoología los esfuerzos no han sido monopolizados por el estudio de los elefantes. Entonces, ¿por qué el predominio, hasta hace dos décadas, del estudio de los sistemas lineales? No es cuestión de dificultad, ya que algunos tratamientos lineales son muy complicados.⁵

⁴ Leo Kadanoff (medalla Boltzmann, máxima distinción internacional en física estadística) ilustra este punto de vista en términos de pilas de arena y de fluidos sujetos a un gradiente de temperatura (Kadanoff, 1991).

⁵ Es conveniente hacer la distinción entre complicado y complejo. Uno habla, por ejemplo, de un complejo industrial o de un ecosistema complejo; estos sistemas no son simples, conllevan un alto grado de organización, estructura y funcionalidad. Otro ejemplo es el término "número complejo" introducido por Gauss, en donde es claro que no tenía en mente un número complicado. La relación complicado-sencillo se refiere más bien al grado de dificultad involucrado en el tratamiento de un problema, a lo intrincado de las situaciones en estudio. A menudo se confunden estos términos en la literatura (Oono, 1998).

De hecho, la respuesta es compleja, pues además de estar relacionada con los puntos mencionados en el párrafo anterior, tiene que ver con cuestiones como: el concepto de solución de un problema, el "prejuicio" por soluciones exactas, el éxito de los tratamientos lineales en el mundo cuántico.⁶ Un elemento fundamental se asocia con la capacidad de poder predecir o controlar comportamientos. Suponemos que estarán de acuerdo en que la predicción y el control son algunos de los principales retos de la investigación científica y de sus aplicaciones. Examinemos qué tiene que ver la no linealidad al respecto.

Un problema lineal se considera resuelto cuando se tienen soluciones cuantitativas. Al abordar la no linealidad, las soluciones *cuantitativas* quedan por lo general fuera de nuestro alcance, pero no así los comportamientos *cualitativos*. Éstos pueden ser descifrados, y su estabilidad determinada. El análisis geométrico de la dinámica empleado para ello se originó con los trabajos de Henri Poincaré, de finales del siglo XIX y principios del XX. Resulta que en 1892, al participar en un concurso destinado a la resolución del problema de n -cuerpos con interacción gravitacional, Poincaré demostró que no es posible asegurar que el sistema solar se mantendrá para siempre en una configuración semejante a la presente.⁷ Pero ¿se dan cuenta de que con ello se pone en entredicho la estabilidad del sistema solar, el coto máspreciado de la mecánica newtoniana? En su libro *Science et méthode*, Poincaré (1909) deja claro que "una pequeña causa, fuera de nuestro control, determina un efecto que no podemos ignorar,

⁶ En el capítulo 5 del libro *In the Wake of Chaos*, el autor, H. Kellert (1993), presenta una discusión a fondo sobre este tema.

⁷ Recientemente, este episodio de la historia de la ciencia ha recibido considerable atención; véanse por ejemplo Barrow-Green (1997), Peterson (1993) y Diacu (1996).

por lo que decimos que ese efecto es resultado del azar".⁸ Tenemos entonces un sistema dinámico⁹ completamente determinista, el cual adquiere un comportamiento aparentemente azaroso debido a una sensibilidad extrema a sus condiciones iniciales. En otras palabras, lo que tenemos es la semilla de lo que actualmente se identifica en la literatura científica como *caos determinista*.

Puesto que el caos sólo aparece con dinámicas no lineales, y como durante buena parte del siglo XX se confundieron sus manifestaciones con una especie de "ruido molesto" que apantalla comportamientos regulares, predecibles y controlables, el estudio de los sistemas no lineales se vio relegado a un segundo plano. Pese a la veracidad del anterior argumento, conviene hacer una aclaración para evitar malos entendidos: si bien el caos requiere de la no linealidad, el reverso es falso. La no linealidad no conduce necesariamente a un comportamiento caótico; es más, la no linealidad puede generar dinámicas regulares, periódicas y muy estables. Por ejemplo, para ciertos valores de los parámetros, los procesos de *retroalimentación* pueden generar ciclos límite y estructuras espacio-temporales robustas.¹⁰ La potencialidad de este comportamiento

⁸ D. Ruelle (también medalla Boltzmann) presenta un recuento particularmente lúcido de estos temas en su libro *Chance and Chaos* (Ruelle, 1991).

⁹ Para los propósitos de esta exposición consideramos como sistema dinámico la descripción de la evolución en el tiempo de un sistema determinista. Para una definición rigurosa del término véase el artículo de Steven Smale (medalla Fields, máxima distinción internacional en matemáticas) en la referencia (Smale, 1967).

¹⁰ Una excelente y entretenida presentación de la dualidad orden-desorden resultante de dinámicas no lineales se encuentra en el libro *Espejo y reflejo: del caos al orden* (Briggs, 1990). En particular se presentan dos ejemplos espectaculares de formación de estructuras espacio temporales estables debidos a dinámicas no lineales: la Gran Mancha Roja de Júpiter y los tsunamis u olas sísmicas. La Mancha Roja es tan grande y estable que puede

para las comunicaciones y la electrónica de dinámicas no lineales fue claramente percibida en la ex Unión Soviética; prueba de ello es que muchos estudios al respecto se publicaron en revistas de radiofísica. Además, se estableció una "escuela rusa" sobre estudios no lineales alrededor de figuras como Andronov y Pontryagin, que con el tiempo condujo a la formación de investigadores de la talla de Anosov, Arnold, Novikov y Sinai, entre otros. En Occidente los intentos de desarrollar los métodos cualitativos para problemas no lineales fueron más esporádicos, aunque cabe mencionar los trabajos de Cartwright, Levinson y Littlewood sobre problemas de osciladores forzados.

Pero, entonces, ¿cómo se explica la transición de la falta de interés por el "ruido molesto" al furor por el caos que se generó a partir de los años setenta?¹¹ Resulta que por

albergar muchas veces a la Tierra y ha sido observada por más de 300 años. Está situada en el hemisferio meridional, debajo del ecuador del planeta; mantiene su latitud y se desplaza lentamente alrededor de Júpiter. Observaciones astronómicas por medio del Voyager, simulaciones numéricas y experimentos realizados en la Tierra, indican que se trata de una perturbación atmosférica con una dinámica no lineal en la cual un orden de gran escala emerge del caos en escalas pequeñas. Pequeños vórtices se van amalgamando formando una estructura amplia y estable.

Los tsunamis se forman cuando una perturbación sísmica sacude el lecho oceánico. Se genera entonces una ola con una altura pequeña (centímetros o metros) y longitud de onda larga (cientos de metros) que puede viajar miles de kilómetros. Al llegar a las costas, debido a efectos no lineales de aguas poco profundas, la ola acorta su longitud de onda e incrementa su altura drásticamente (decenas de metros), causando tragedias como la muerte de 100 000 personas en Japón en 1702. A este tipo de ondas viajeras no lineales se las conocen como *solitón*.

¹¹ Cabe aclarar que nuestra respuesta a esta pregunta es parcial. Son muchos más los factores y actores que contribuyeron al desarrollo del estudio de los sistemas caóticos. Nuestra selección está condicionada por cuestiones de espacio y por su relevancia para el material que se presentará más adelante. Nombres que sin embargo no deben ser omitidos son: ¡) el meteorólogo Eduard

esa época, tanto Feigenbaum (1978) como Tresser y Couillet (1978) mostraron que se puede obtener un comportamiento extremadamente complejo de una ecuación de evolución extremadamente sencilla. El mapeo (transformación) que estudió Feigenbaum es conocido con el nombre de *logística* y fue propuesto por Robert May (1976) para el estudio de la dinámica de poblaciones marinas. Su forma explícita es $x_{t+1} = \mu x_t(1-x_t)$, donde x_t indica la "densidad de población" de una especie al tiempo t (el cual ha sido discretizado) y μ es un parámetro asociado con la tasa de crecimiento de la población. La no linealidad viene del cuadrado de x_t , término que aparece en la forma de una retroalimentación y representa una restricción ecológica (poblaciones muy grandes reducen la posibilidad de crecimiento). Con la anterior interpretación, x tiene sentido cuando toma valores entre cero y uno. Si el rango de μ se restringe entre 0 y 4, entonces las x se mantendrán en el intervalo adecuado a lo largo del tiempo. Sucede que al ir variando μ , la dinámica a tiempos largos presenta cambios cualitativos para valores específicos de μ ; al pasar por tales valores ocurre lo que en sistemas dinámicos se conoce como una *bifurcación*. Cuando μ toma valores entre 0 y $\mu_\infty = 3.569945\dots$ la dinámica tiende a un comportamiento fijo o periódico para tiempos largos (véase la figura 1, periodos 1, 2, 4). Ese comportamiento estable corresponde a lo que se conoce como un *atractor*; las evoluciones temporales (órbitas) quedan eventualmente (esto es, después de un transitorio) regidas por el atractor.

Lorenz, quien se percató de la sensibilidad ante condiciones iniciales en estudios numéricos de ecuaciones no lineales asociadas a flujos con soluciones no periódicas (Lorenz, 1963), y *ii*) los astrónomos Michel Hénon y Carl Heiles, quienes reportaron en 1964 sus estudios sobre el comportamiento no periódico de las trayectorias de estrellas en galaxias. Para una presentación de sus contribuciones véase Gleick (1987).

Es *interesante* observar que las órbitas van duplicando su periodo (doblamiento de periodo) al incrementarse μ hasta llegar al valor μ_∞ , para el cual se tiene un comportamiento de "periodo infinito", lo que corresponde a la emergencia del caos. Resulta *sorprendente* que pueda establecerse una relación entre valores de μ para bifurcaciones sucesivas, que en el límite de un número infinito de doblamientos de periodo converge a un valor, conocido como δ de Feigenbaum, que es *universal*. Esto significa que para toda una amplia familia de mapeos (reglas de evolución), el valor de δ es el mismo. Con esto se está *cuantificando* un comportamiento *cualitativo*.

Pero aún hay más, es *extraordinario* que, motivados por la universalidad, se empezaran a realizar una serie de experimentos en sistemas (por ejemplo, fluidos) que requieren para su descripción de un número infinito de variables (grados de libertad), con el resultado de que la medición de la constante δ corroboró el valor determinado con la logística. Con ello se mostró que algunos aspectos del comportamiento de fenómenos naturales muy elaborados obedecen a reglas de evolución muy simples.

¿Y qué sucede para valores de μ mayores a μ_∞ ? Al aumentar μ se da una sucesión de comportamientos irregulares mezclados con dinámicas periódicas; los primeros corresponden al caos, mientras que las segundas son las llamadas *ventanas*, con comportamiento regular (véase la figura 1). Es más, la constante δ también puede determinarse a partir de la estructura subyacente en el patrón de bifurcaciones en esta zona caótica. En particular para $\mu = 4$ se obtiene un comportamiento equivalente (topológicamente) al de un corrimiento de Bernoulli,¹² el cual se considera

¹² El corrimiento de Bernoulli viene dado por el mapeo $x_{t+1} = 2x_t \text{ mod}[1]$, donde $\text{mod}[1]$ indica la operación de quedarse con la parte comprendida entre 0 y 1. Supongamos que se puede determinar

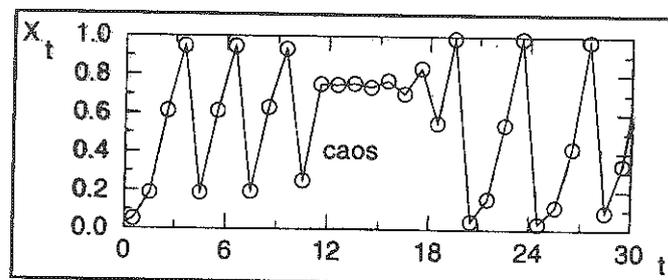
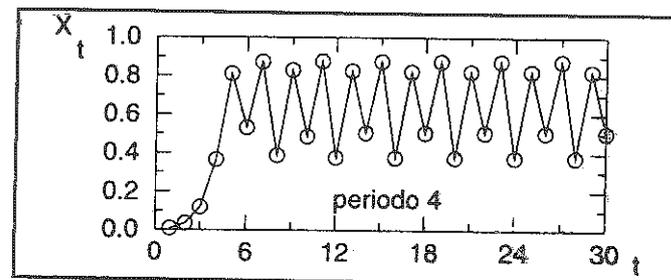
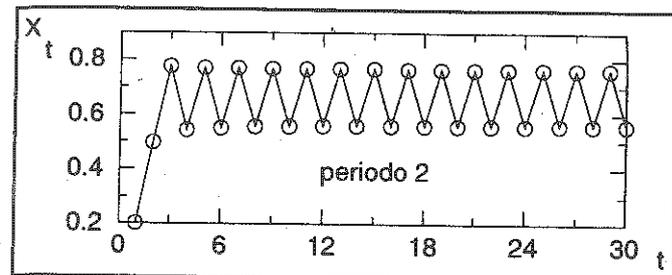
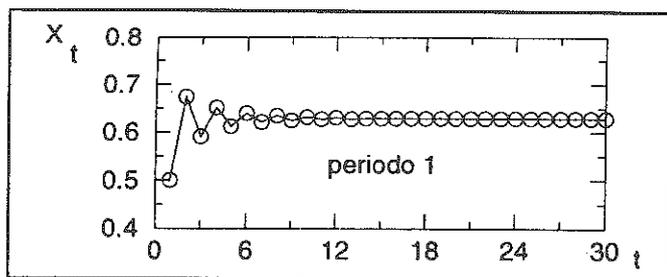
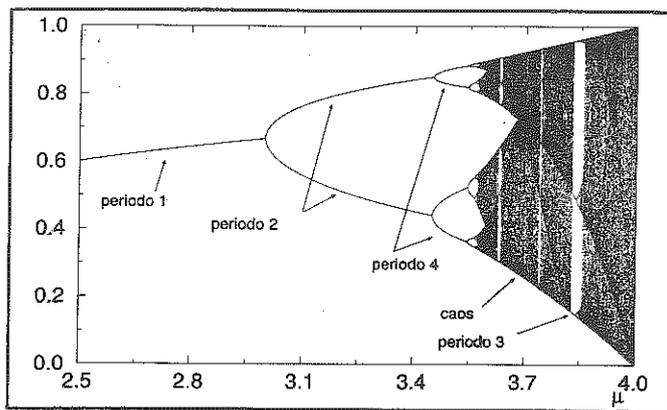


Figura 1. El cuadro superior es el diagrama de bifurcaciones del mapeo logístico. Para cada valor del parámetro μ se grafica el atractor del mapeo, o sea, el conjunto entre 0 y 1 al que se restringen los valores del mapeo para tiempos largos. Para valores de μ entre 2.5 y 3 hay un solo valor, que corresponde a una órbita de periodo uno, esto es, pasado el transitorio, las iteraciones subsiguientes no cambian el valor de x ; esto puede verse en el cuadro intermedio izquierdo (marcado periodo 1), donde se observa que la evolución en el tiempo del mapeo conduce a un valor fijo después de una decena de iteraciones. Los casos de periodos 2 y 4 están señalados, tanto en el patrón de bifurcaciones como en las gráficas de las órbitas, en dos de los cuadros pequeños. Para el valor $\mu_{\infty} = 3.569945\dots$ se presenta la transición al caos con la aparición de bandas de valores en el patrón de bifurcación. Para este valor de μ convergen una infinidad de líneas provenientes de la izquierda con una infinidad de bandas provenientes de la derecha. Propiedades de

esta convergencia determinan el valor de la constante (universal) δ de Feigenbaum. En la región de bandas, las iteraciones las visitan en forma regular, tomando valores dentro de cada banda en forma aparentemente azarosa. El cuadro último muestra una órbita caótica. Las tiras blancas que se observan en el patrón de bifurcación para valores de μ mayores que μ_{∞} se conocen como ventanas. En ellas el comportamiento es periódico o intermitente. En la figura se señala la ventana de periodo 3. Nótese la intrincada estructura subyacente en la región caótica (orden dentro del caos).

prototipo del caos determinista. Cumple con la propiedad de ser una dinámica expansiva que estira distancias, pero que al estar constreñida a un espacio finito (compacto) produce una "revoltura" impresionante (el nombre formal es, de hecho, *mezclado*). Las órbitas del mapeo logístico con $\mu = 4$ presentan un comportamiento estadístico muy semejante al azar. Por ejemplo, el conocimiento de un número finito de puntos de la órbita no permite predecir el siguiente valor; sin embargo, es una dinámica determinista con una regla de evolución. Se tiene entonces un comportamiento aparentemente azaroso con un orden subyacente, un *orden dentro del caos*.

Por supuesto que hallazgos como los anteriores se dan dentro de un contexto histórico. Para fines de los setenta el análisis cualitativo de los sistemas dinámicos se encontraba bastante desarrollado. El estudio de los *atractores* (para nuestros propósitos, éstos son conjuntos a los que converge algún subconjunto de órbitas del sistema dinámico) recibía especial atención.¹³ La línea de pensamiento era que

una condición inicial para este mapeo con un grado de precisión de 13 cifras en una base binaria, por ejemplo:

$$x_0 = 0.1001101000111.$$

Cuando llevamos a cabo una iteración, x_n se multiplica por 2, lo cual equivale a suprimir el primer dígito en la expresión binaria. Si este proceso lo realizamos 12 veces, el número con el que terminamos es 0.1, y para la treceava iteración tenemos una incertidumbre total, pues desconocemos los dígitos que siguen. Con cada iteración perdemos información sobre el sistema. Esto significa que cualquiera que sea la precisión (finita) de la condición inicial, siempre llegaremos a una situación de total incertidumbre si iteramos la transformación un número suficiente de veces. Con este ejemplo se pone claramente de manifiesto que, a pesar de tratarse de un proceso determinista, el comportamiento asintótico no es predecible, pues para ello se requiere de una precisión infinita en las condiciones iniciales.

¹³ A partir de los trabajos de Smale durante la década de los sesenta se planteó un programa de clasificación de los sistemas dinámicos. La búsqueda se centró sobre cuál era la clase más general de

dado que los atractores definen el comportamiento asintótico de la dinámica, el estudio de sus propiedades geométricas, topológicas, de estabilidad (ante condiciones iniciales, global, estructural, etc.) y de evolución ante bifurcaciones, permitiría una clasificación de comportamientos genéricos. Los recorridos entre o hacia los atractores corresponden a transitorios, que, como su nombre indica, eventualmente desaparecen.

Los atractores son entes geométricos sumergidos en el espacio de fases. Un punto del espacio de fases determina el estado dinámico del sistema, y cualquier estado dinámico tiene su representación en el espacio de fases. Por ejemplo, para un sistema mecánico de tres partículas el espacio es de dimensión 18, puesto que se requieren tres coordenadas de posición y tres de velocidad para cada una de ellas. Si los atractores contienen toda la información relevante, la dinámica *de facto* se desarrolla en general en un espacio de dimensión menor que la del espacio fase. Por ejemplo, para una masa puntual sujeta al extremo de un resorte con fricción, con el otro extremo fijo (oscilador armónico amortiguado), las coordenadas del espacio fase son la elongación del resorte y la velocidad con que se desplaza el extremo libre. Como eventualmente se alcanzará el reposo, en este caso el atractor es un punto en el origen, al

sistemas con estabilidad estructural (aquellos que ante perturbaciones pequeñas conservan su comportamiento cualitativo). La noción de estabilidad estructural fue introducida en los años treinta por Andronov y Pontryagin. Después de la segunda guerra mundial, S. Lefchetz impulsó el estudio de la estabilidad estructural en Occidente. En un principio se consideraron sistemas con un número finito de comportamientos periódicos, pero luego se pasó a sistemas con un número infinito de comportamientos periódicos. Por un par de décadas este programa de clasificación fue fundamental para el desarrollo de los sistemas dinámicos; sin embargo eventualmente fue abandonado, en buena medida debido a evidencia numérica en su contra.

cual convergen todas las trayectorias describiendo espirales (fóco). Si forzamos el resorte en forma armónica, entonces el atractor es una curva cerrada (ciclo límite), a la cual se converge tanto del interior como del exterior de la curva. Y cuando se tiene una dinámica caótica, ¿cómo se ven los atractores? En 1971 Ruelle y Takens (Ruelle, 1971) propusieron un modelo, con sensibilidad a condiciones iniciales, para un flujo turbulento que presentó un atractor con propiedades geométricas muy extrañas, por lo que no tuvieron más remedio que llamarlo *atractor extraño*.¹⁴ El atractor resultó ser un *fractal*.

El concepto de fractal fue introducido por B. Mandelbrot. Un objeto es fractal si mantiene una estructura no trivial en todas las escalas, lo cual equivale formalmente a que su dimensión de Hausdorff sea mayor que su dimensión topológica (la usual), por lo que, en general, se habla de dimensiones no enteras.¹⁵ Esta situación se percibe claramente en la "esponja de Sierpinski" que se muestra en la figura 2.

¹⁴ Con muchos años de antelación (1916) el matemático George David Birkhoff, al estudiar inestabilidades en mecánica celeste siguiendo el tratamiento geométrico de Poincaré, encontró una curva sorprendente que es probablemente el primer antecesor de los atractores extraños. Es más, en 1948, Levinson mostró que el atractor de Birkhoff se presenta también en el comportamiento de un oscilador forzado en tres dimensiones. A su vez, el trabajo de Levinson estuvo influido por los estudios de Cartwright y Littlewood sobre los experimentos del oscilador de Van der Pol reportados en 1927, en donde se mostraba la generación de subarmónicos al conectar un oscilador armónico con un oscilador de relajación. La cascada de subarmónicos presentaba bandas de ruido al cual prestaron poca atención. ¿Qué hubiera dicho Feigenbaum al respecto?

¹⁵ La dimensión de Hausdorff está relacionada con la dimensión que requieren los elementos de una cubierta (conjunto con un número finito de elementos con ciertas características topológicas que cubre) de un objeto geométrico al tender su tamaño a cero y su número a infinito, de tal manera que el "volumen" del objeto sea finito y distinto de cero. Una presentación rigurosa de la definición de fractal se encuentra en Mandelbrot (1977).

Al ir iterando el algoritmo con el cual se construye la figura, su área tiende a infinito y su volumen a cero. Resulta así un objeto con una dimensión comprendida entre dos y tres. Desde la perspectiva de los fractales esta dimensión queda perfectamente bien determinada; su dimensión fractal (de Hausdorff) es 2.7268.¹⁶

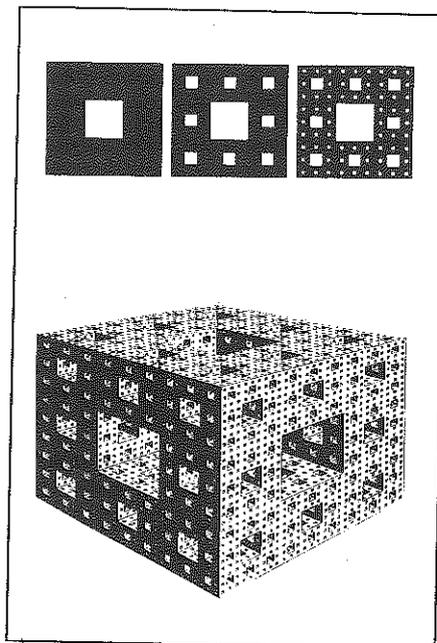


Figura 2. En la parte superior de la figura se muestran los primeros pasos del proceso iterativo mediante el cual se construye la figura inferior, conocida como esponja de Sierpinski. Nótese que al aumentar el número de iteraciones del proceso, el volumen de la esponja tiende a cero, mientras que su superficie crece ilimitadamente. La dimensión fractal (de Hausdorff) de este objeto es 2.7268.

¹⁶ Éste es un fractal con autosimilaridad exacta; por construcción, estructuras espaciales idénticas se repiten en todas las escalas. En general para los objetos fractales, especialmente para los que encontramos en la naturaleza, la autosimilaridad puede ser aproximada. Incluso se había de multifractales, para los cuales coexisten varias leyes de escalamiento.

Resulta que la naturaleza está plagada de objetos fractales. Cuando volteen al cielo, y si los IMECAs¹⁷ lo permiten, contemplan la geometría de las nubes y observen cómo se repiten estructuras en todos los tamaños (escalas).¹⁸ Como veremos más adelante, la invariancia ante cambios de escala tiene consecuencias profundas en el comportamiento de los fenómenos naturales; en particular se registra en el estudio de los fenómenos críticos. En el ámbito de la dinámica, las propiedades fractales no sólo se observan en los atractores. En la figura 1, por ejemplo, queda de manifiesto un reescalamiento del patrón de bifurcaciones (o sea, en la forma en que se suceden cambios cualitativos de la dinámica al modificar los parámetros): al amplificar alguna región de la figura se obtiene un objeto similar a la figura completa.

Un factor sobre el que no hemos comentado y que ha permeado continuamente el estudio reciente de los sistemas no lineales es la disponibilidad generalizada de instrumentos de cálculo con capacidades de cómputo insospechables hace dos décadas. Con ello, y con el desarrollo de la electrónica en general, surgen disciplinas nuevas, como las ciencias de la computación y de la informática. Se puede, por ejemplo, hablar de la física computacional como complementaria a la física experimental y a la teórica. En este contexto, la generalidad de la ocurrencia de comportamientos caóticos puesta de manifiesto por simulaciones en computadora es tal que ha modificado radicalmente el rumbo de la investigación de los fenómenos no lineales.

¹⁷ Nota para los no chilangos: unidad de medida de la contaminación del aire del Valle de México, sin relación alguna con los chichimecas.

¹⁸ La formalización del concepto fractal ha producido un cambio en la percepción de la naturaleza. La palabra fractal se emplea en casi todas las actividades humanas: arte, ciencia, literatura, cine, etcétera.

Otra evolución reciente en el estudio de los fenómenos no lineales es la tendencia en algunos medios a vincular ramas del conocimiento basadas en conceptos probabilísticos y estocásticos con otras fundadas en tratamientos determinísticos. Por ejemplo, en el caso de la clasificación de los sistemas dinámicos, el concepto fundamental de estabilidad estructural propuesto por Smale se ha visto desplazado en ocasiones por el de estabilidad estocástica.¹⁹ Hay un movimiento de fusión.²⁰

Desde el punto de vista epistemológico, la asociación determinismo-predictibilidad, azar-incertidumbre requiere de un análisis más fino.²¹ El determinismo tiene que ver con el comportamiento de la naturaleza; en cambio, la predictibilidad está relacionada con las observaciones, cómputo y análisis que nosotros realizamos. ¿Cómo podemos demostrar que un sistema impredecible es verdaderamente no determinista y que nuestra falta de predictibilidad no se debe a una limitación de nuestras habilidades? Cuando nos referimos al caos, nos movemos en un esquema en donde existe una ley de evolución expresada por una ecuación determinista; la falta de predictibilidad se debe a la incertidumbre ocasionada por la sensibilidad a las condiciones iniciales y no es indicativa de una incertidumbre en la naturaleza. Otro es el caso de un proceso para el cual no hay tal ley de evolución, o, si se llega a tener, es una ley estocástica; en este caso el estado del sistema, a un tiempo dado, especifica únicamente (aun cuando se tuviese la información inicial completa hasta el más mínimo detalle)

¹⁹ La nueva propuesta es del matemático brasileño Jacob Palis.

²⁰ Un provocativo texto donde se exploran las relaciones entre los sistemas dinámicos, probabilidad, teoría ergódica, informática y lingüística es el de Badii (1997).

²¹ Aquí seguimos algunos planteamientos expresados en Bricmont (1996).

una distribución de probabilidad para el estado a un tiempo posterior.²²

Una cantidad directamente relacionada con la predictibilidad es el exponente de Liapunov, el cual da una medida promedio —para tiempos largos— de cómo se van alejando órbitas del sistema dinámico que partieron con condiciones iniciales muy cercanas. En un sistema unidimensional, si la diferencia en el punto de partida en el tiempo inicial t_i de dos órbitas cercanas fue ε_i y para un tiempo final t_f es ε_f , el exponente de Liapunov λ se define a partir del límite, cuando $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $(t_f - t_i) \rightarrow \infty$, de $\lambda(\varepsilon_i, t_f - t_i, x_i)$ determinado por la expresión $\varepsilon_f = \varepsilon_i \exp\{(t_f - t_i)\lambda(\varepsilon_i, t_f - t_i, x_i)\}$. El inverso del valor absoluto del exponente de Liapunov determina, por consiguiente, un tiempo característico de la dinámica asintótica. Si λ es negativo, la diferencia entre las dos trayectorias desaparece exponencialmente a lo largo del tiempo y el sistema presenta un atractor. En este caso el tiempo característico opera como un tiempo de relajamiento. Si λ es positivo, las órbitas cercanas se alejan exponencialmente, se presenta la sensibilidad a condiciones iniciales, las incertidumbres iniciales divergen para tiempos largos y se tiene una dinámica caótica. En estas condiciones, el exponente de Liapunov es una medida del tiempo característico que se requiere para que las dos órbitas estén descorrelacionadas, o sea, es una medida del *horizonte de predictibilidad*. Cuanto mayor sea el caos, mayor será λ y menor el horizonte de predictibilidad.²³ El

²² Una línea de investigación relacionada con el determinismo, predictibilidad, azar e incertidumbre que más se ha desarrollado recientemente, es la del análisis no lineal de series temporales. El interés parte tanto de su importancia conceptual como por sus aplicaciones. Como ejemplo, consúltese el libro de Weigend (1993).

²³ Cuando el sistema consta de muchos grados de libertad se tiene un espectro de exponentes de Liapunov, el cual se puede relacionar con la dimensión fractal del atractor y en ocasiones con propiedades ergódicas como la entropía de Kolmogorov-Sinai.

caso $\lambda = 0$ es marginal, no hay tiempo característico, pues el inverso de λ tiende a infinito.²⁴ Conviene aquí recalcar la diferencia que mencionamos con anterioridad con una dinámica regida por una ley estocástica. En el caso determinista, la falta de predictibilidad se mide en términos de la divergencia en una incertidumbre inicial, la cual se presenta para tiempos relativamente largos (mayores que el tiempo característico); en cambio, en el caso estocástico, dos realizaciones del sistema con la *misma* condición inicial (incertidumbre inicial nula) podrían estar en dos estados muy distintos, incluso después de un tiempo corto.

En un principio, los estudios sobre caos se realizaron sobre sistemas de baja dimensionalidad. Con el tiempo se ha ido incursionando en casos con muchos grados de libertad; ahora se estudian sistemas espacialmente extensos y se habla de caos espacio-temporal. La tendencia presente es que si bien, en algunos casos, modelos de dimensión muy baja determinan las características esenciales de sistemas con muchos grados de libertad, en general las descripciones más adecuadas se desarrollarán en espacios con una dimensión de tamaño intermedio. Un cambio significativo que puede ocurrir al pasar a los sistemas extensos es que el papel preponderante de los atractores se vea disminuido debido a que con frecuencia los tiempos asociados a los transitorios, entre o hacia los atractores, crecen considerablemente con el tamaño del sistema, llegando a diverger exponencialmente, e incluso hiperexponencialmente con él. Para sistemas de muchos componentes interactuantes en condiciones de criticalidad, como las que se mencionarán más adelante, puede suceder que la evolución se desarrolle esencialmente entre transitorios, sin alcanzarse nunca los

²⁴ Esta situación marginal de ausencia de escala que se presenta al borde del caos nos la encontraremos más adelante asociada a situaciones de criticalidad.

estados estacionarios asociados con los atractores. Esta situación se recrudece particularmente cuando se presentan procesos adaptativos para los que los tiempos de evolución de los atractores son menores que los de los transitorios. Se trata, entonces, de procesos con retroalimentación que da lugar a dinámicas en cambio continuo.²⁵

Al principio de esta sección mencionamos que queda excluida la posibilidad de ejercer un control en situaciones caóticas al no poder predecir el comportamiento dinámico. Contra todo lo esperado, a principios de la década de los noventa se popularizó la noción de *control caótico*. Por medio de procesos de sincronización es posible encadenar la dinámica de un sistema a la de un subsistema caótico. Esto llamó inmediatamente la atención de la comunidad científica relacionada con telecomunicaciones (por ejemplo, con criptografía). Incluso para el control remoto de vuelos espaciales se ha visto que con el aprovechamiento del caos se obtiene un comportamiento más robusto que a partir de dinámicas regulares estables (Shinbrot, 1993a, 1993b, y Ditto, 1993).

Recapitemos sobre el contenido de esta sección: comportamientos aparentemente azarosos pueden resultar de evoluciones deterministas; dinámicas no lineales son indispensables para estos comportamientos caóticos; frecuentemente, la no linealidad aparece asociada a procesos de retroalimentación; modelos muy sencillos pueden dar lugar a comportamientos muy complicados que son obser-

²⁵ Este tipo de proceso adaptativo empieza a tener repercusión en el modelaje de sistemas sociales, económicos y políticos. Por ejemplo, el economista Brian Arthur menciona lo siguiente: "Con la aceptación de retroalimentaciones positivas, las teorías de los economistas empiezan a considerar a la economía, no como simple, sino como compleja, no como determinista, predecible y mecanicista, sino más bien como proceso-dependiente, orgánica y en continua evolución" (Arthur, 1990).

vables en sistemas con muchos grados de libertad. Al analizar la dinámica de un sistema de baja dimensionalidad, salvo transitorios, la información relevante se encuentra en objetos llamados atractores con dimensión menor o igual a la del espacio fase. Cuando se tienen sistemas extensos, los transitorios adquieren particular relevancia. Propiedades geométricas de escalamiento de los atractores se traducen en comportamientos dinámicos sofisticados.

Metodológicamente, observamos una convergencia de diversas áreas de especialización: geometría (fractales), sistemas dinámicos, teoría de campos y física estadística, teoría de la medida y probabilidad. Desde el punto de vista epistemológico se tiene una revisión conceptual sobre caos, azar, determinismo, incertidumbre, y adquieren importancia conceptos como universalidad y genericidad.

CRITICALIDAD

Bueno, ¡basta ya del caos! ¿Qué tal si ahora nos enfrentamos a la crisis? Si nos remontamos a los ideogramas chinos, "crisis" tiene el doble significado de *¡peligro y oportunidad!* Si el peligro lo interpretamos como inestabilidad y la oportunidad como un logro sin costo (energía), tenemos precisamente las condiciones de un punto crítico, como los que se estudian en las transiciones de fase. Durante los años setenta el estudio de los fenómenos críticos (por ejemplo, en la transición líquido-gas, o en la ferro-paramagneto) ocupó un sitio preponderante en el área de la materia condensada. Se trata de fenómenos colectivos de muchos componentes fuertemente interactuantes y con correlaciones en todas las escalas. Pensemos en el caso de un metal ferromagnético al que calentamos hasta alcanzar una temperatura (conocida como temperatura de Curie) en que pierde su magnetismo. Un modelo que describe este proceso es el de Ising, donde se considera que en los

sitios de una red se encuentra una variable, llamada espín, que sólo puede tomar los valores ± 1 , y que interactúa únicamente con sus vecinos cercanos, favoreciendo su alineamiento. A bajas temperaturas, debido a esta interacción se forman dominios de espines alineados; el tamaño de los dominios es finito y dentro de cada dominio los espines se encuentran correlacionados.²⁶ Al aumentar la temperatura la interacción se debilita y los dominios se van fraccionando, con el resultado de que la frontera entre dominios crece hasta darse, a la temperatura crítica, una situación en la cual existen dominios intercalados y anidados en todas las escalas. En estas condiciones, el sistema no sólo se encuentra correlacionado a distancia infinita (o sea, el tamaño del sistema), sino que en todas las escalas hay información física relevante;²⁷ una interacción fuerte de corto alcance produce así un *comportamiento colectivo* con correlaciones a todas las distancias. Este comportamiento de las correlaciones se traduce en que a todas las distancias se tienen *fluctuaciones* y es el efecto combinado de estas fluctuaciones el que produce divergencias en cantidades termodinámicas tales como la susceptibilidad magnética o la capacidad calorífica al aproximarnos a las condiciones críticas. Por ejemplo, la susceptibilidad χ diverge como $|T - T_c|^{-\gamma}$, donde T es la temperatura del siste-

²⁶ Conviene recalcar aquí la diferencia entre la distancia de interacción y la distancia de correlación. La primera es el rango de la interacción física que se está considerando. La segunda es una propiedad estadística. Por ejemplo, dados dos espines, es la distancia de separación para la cual el valor esperado del producto de los dos espines es igual al producto del valor esperado de cada uno. En términos menos formales, es la distancia a partir de la cual un cambio en un espín no afecta al otro espín.

²⁷ Estas últimas palabras casi son el título de la referencia (Wilson, 1979) donde K. Wilson presenta en forma pedagógica su enfoque del estudio de los fenómenos críticos que le valió el Premio Nobel en 1981.

ma, T_c la temperatura crítica y γ el exponente crítico. La particularidad del punto crítico es que, al llegar a él, se presenta una invariancia de escala en la estructura de los dominios magnéticos, esto es, si cambiamos de escala y redefinimos las variables introduciendo una descripción de grano grueso (por ejemplo, un espín efectivo *ad hoc* a la nueva escala de la red), lo que observamos es prácticamente indistinguible de la observación realizada antes del reescalamiento. En 1971, K. Wilson, basándose en sus conocimientos de teoría de campo en el contexto de partículas elementales y en un esquema geométrico de escalamiento propuesto por Kadanoff en 1966, implementó una herramienta de cálculo, conocida como *grupo de renormalización*, con la cual obtuvo valores para los exponentes críticos (como la γ de arriba) que caracterizan las divergencias mencionadas. Todo lo anterior lo pudo llevar a cabo gracias a la invariancia de escala que presenta el fenómeno crítico. Con el grupo de renormalización se demostró que conjuntos de fenómenos naturales con diferencias en el nivel mesoscópico se agrupan en familias de modelos, dando lugar a comportamientos globales macroscópicos caracterizados por los mismos números (los exponentes). El concepto de universalidad quedó entonces firmemente asentado.²⁸

En buena medida, este periodo del desarrollo de la ciencia marcó el rumbo para la investigación futura en el área

²⁸ El desarrollo de las ideas de universalidad en el contexto de los fenómenos críticos se remonta a los trabajos de Van der Waals a finales del siglo XIX con la introducción de variables reducidas. Otros antecedentes son la ley de estados correspondientes y los escalamientos propuestos a finales de la década de los sesenta, en términos de las singularidades de potenciales termodinámicos por Widom y en términos de funciones de correlación por Kadanoff. La evidencia experimental que se fue acumulando resultó determinante para la formulación de teorías más allá de un campo promedio que incluyesen el efecto de fluctuaciones.

de los sistemas complejos, tanto desde el punto de vista metodológico como conceptual. En varias áreas del conocimiento se manejaron situaciones similares:

i] la búsqueda de una cuantificación de comportamientos cualitativos globales (por ejemplo, clasificación de atractores en sistemas dinámicos, comportamientos críticos en sistemas físicos);

ii] un enfoque sobre propiedades de invariancia de escala (fractales en las formas geométricas, atractores extraños en la dinámica, escalamiento en los fenómenos críticos);

iii] el desarrollo del pensamiento analógico, que propició el libre tránsito entre disciplinas (la incursión de técnicas propias del estudio de partículas elementales como el grupo de renormalización en la física estadística;²⁹ la injerencia de una visión geométrica, como el caso de fractales en atractores; la concepción de los exponentes críticos como dimensiones anómalas), y

iv] la apertura de un nuevo horizonte por parte de las ciencias computacionales.

Al incursionar en el estudio de los sistemas complejos, la interdisciplinariedad adquiere una nueva dimensión. Por ejemplo, la biología participa en forma preponderante (incluso se ha expresado [Oono, 1998] que la investigación en sistemas complejos es la biología): evolución, morfogénesis, inmunología, ecología, neurociencias... todas entran en el ruedo. Se relacionan procesos que se pre-

²⁹ El flujo, en ambos sentidos, entre la física estadística y la teoría de campos durante las décadas de los setenta y ochenta fue insólito, enriqueciendo ambas disciplinas. Por ejemplo, el tratamiento de nudos en soluciones poliméricas por medio de teorías de norma tipo Yang-Mills, o la incursión en las teorías de cuerdas de conceptos de la física de polímeros diluidos. El libro de P. G. de Gennes (1979), premio Nobel 1990, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, es un ejemplo de esta tendencia. Véase Martínez Mekler (1981) para una discusión más detallada al respecto.

sentan en la meteorología, la astrofísica, la geofísica. Se replantean líneas de investigación y desarrollo en las ciencias sociales y económicas.

Al pasar a los sistemas complejos se transita del equilibrio a los *procesos fuera de equilibrio*,³⁰ en general lejos del equilibrio. En los sistemas en estudio hay flujos de energía, materia, información y/o entropía. Con ello se da la posibilidad de la aparición de una estructura espacial y temporal con la correspondiente funcionalidad. Se habla de *propiedades emergentes*, tales como aprendizaje y autoorganización. Veamos a través de ejemplos específicos algunos de los tratamientos que se han implementado.

INTERDISCIPLINARIEDAD

De pilas de arena y terremotos

Imagínense a un individuo ocioso que enfrente de una mesa decide remontarse a su niñez, cuando en la playa construía pilas de arena. Para ello empieza a depositar granos de arena uno a uno encima de la mesa. Si el fulano, además de ser ocioso está familiarizado con la física, se percatará de que tiene sobre la mesa un sistema dinámico

³⁰ En inglés estos procesos habitualmente se denotan como de "noequilibrio"; hacemos esta aclaración porque de hecho la expresión "noelefantes" fue empleada por Von Neumann al comentar sobre la elaboración de una teoría del "noequilibrio". En este caso, el objetivo era puntualizar que la variedad de fenómenos que se plantearían era tal que la elaboración de una teoría del "noequilibrio", en contraposición a una de equilibrio, sería algo irrealizable. Algunos de los estudiosos de los sistemas complejos consideran que el desarrollo de una teoría de sistemas complejos es un esfuerzo en esta dirección (Bak, 1994). Nota: en "argentino", por supuesto, se utiliza "desequilibrio".

con muchos grados de libertad interactuantes, para el cual una capa plana de arena corresponde a un estado global de equilibrio de mínima energía. En un inicio, aun en la presencia de pendientes pequeñas, al caer un grano de arena, éste se quedará cerca del sitio donde cayó. Con el tiempo se va formando una pila en la que se dan pequeñas avalanchas, esto es, al caer un grano se producen perturbaciones locales. Eventualmente ocurrirá lo que todos hemos observado, pero quizá no hayamos examinado en detalle: se forma una pila de arena con una pendiente ¡que se mantiene fija! La cantidad de arena depositada en *promedio* se balancea con la que se va cayendo de la mesa. Nuestro ecuánime conocedor de la física se dará cuenta de que lo que tiene ante sí ahora es un estado lejos del equilibrio que es *estadísticamente* estacionario. En estas condiciones se presentan avalanchas de *todos* los tamaños, incluso del tamaño del sistema. Antes de llegar a este estado estacionario, un cambio pequeño en la posición de caída de un grano producía cambios pequeños en la configuración del sistema. En el estado estacionario, la situación es radicalmente diferente: un solo grano de arena puede causar una avalancha que afecte a toda la pila de arena.

¿Qué es lo que está ocurriendo? En 1987, Bak, Tang y Weisenfeld (Bak, 1987) presentaron un modelo para el estudio de la formación de pilas de arena.³¹ En su simulación, se depositan uno a uno los "granos de arena" en la cima de una pila de arena modelo. Los granos se encuentran formando columnas en los sitios de una red cuadrada. Si la pendiente local, esto es, la diferencia de altura entre columnas vecinas, es suficientemente pequeña, los granos permanecen en su sitio. Si la pendiente local pasa de un cierto umbral, el grano depositado "resbala" y se produce un deslizamiento local. Al "caer" el grano en un sitio más

³¹ Nuestra presentación sigue el material expuesto por Kadanoff (1991).

abajo, puede volver a sobrepasar el umbral, con lo que se genera una cascada; en ocasiones, puede suceder que, al moverse, un grano inicie una serie de eventos más arriba. Dependiendo entonces de la configuración de la pila, con la caída de un solo grano de arena pueden producirse avalanchas de todos los tamaños, generadas por pendientes locales por encima de un umbral. Resulta que, para tiempos largos, la pila de arena mantiene fija su pendiente en promedio y que la distribución del tamaño de las avalanchas sigue una ley de potencia, es decir, al graficar el logaritmo del número de avalanchas de un tamaño dado contra el logaritmo del tamaño, se obtiene una recta. En este sentido el fenómeno guarda cierta similitud con un fenómeno crítico, al asociar tamaño de avalancha con tamaño de dominio magnético.

El punto más interesante del proceso es la constancia de la pendiente promedio de la pila; esto se debe a que la dinámica hace que la pila de arena se *autorganice*. Cuando la pila tiene una pendiente muy pequeña, al agregar arena sólo se presenta uno que otro deslizamiento pequeño, por lo que la pendiente global tiende a aumentar; en cambio, si la pendiente global es muy grande, con frecuencia se dan avalanchas catastróficas que la hacen disminuir. Se llega así, mediante un proceso de *retroalimentación*, a una pendiente intermedia con una estabilidad marginal que balancea los dos efectos. Cuando el sitio de depósito de los granos se escoge al azar, las características azarosas de configuración de la pila se ven multiplicadas por la dinámica, dando lugar a avalanchas de todos los tamaños, pero con claro predominio de las pequeñas (las muy grandes son raras). A diferencia de los procesos caóticos descritos con anterioridad, aquí se conjugan aspectos deterministas (la regla de evolución del sistema) con otros azarosos ligados al entorno.

Una característica que el ejemplo pone de manifiesto es la variedad de niveles de organización que se presen-

tan: el grano de arena individual, una avalancha, el comportamiento colectivo de muchas avalanchas. La dinámica local de los granos de arena es muy complicada; en cambio, la descripción del comportamiento estadístico de las avalanchas cerca del estado estacionario sigue leyes de evolución sencillas del tipo ecuación de difusión. Para los distintos niveles de descripción *emergen* distintas "leyes de la naturaleza".

El problema de las pilas de arena es el prototipo de fenómenos que presentan la llamada *criticalidad autoorganizada*. Éstos son procesos fuera de equilibrio, en los cuales se alcanza un estado estadísticamente estacionario pero *marginalmente* estable, en el que pequeñas perturbaciones producen efectos de todos los tamaños. Aparece así una distribución de efectos que presenta invariancia de escala tanto en el espacio como a lo largo del tiempo. Sistemas con estas características se dice que evolucionan al *borde del caos*. Los comportamientos individuales son totalmente impredecibles dada la estabilidad marginal; en este sentido, el horizonte de predictibilidad de un evento específico es cero.³² Sin embargo, si pasamos a otro nivel de descripción para fijarnos en el comportamiento estadístico, por ejemplo, de valores promedio, se observan comportamientos regulares y simples en algunas propiedades de estos sistemas. Tal es el caso de la distribución de la inversa de los intervalos de tiempo (las frecuencias) entre eventos de igual "magnitud", que para estos sistemas sigue una ley de potencias. Se tiene así una invariancia de escalas en el tiempo, a la que se refiere uno como un compor-

³² Nótese la diferencia de los mecanismos que llevan a un horizonte de predictibilidad cero en este caso, y la situación de una dinámica con exponente de Liapunov $\lambda = 0$, donde "al borde del caos" se refiere a un comportamiento marginal entre regularidad $\lambda < 0$ y evolución de tipo azaroso con $\lambda > 0$.

tamiento de tipo $1/f$.³³ En este sentido el proceso es menos "azaroso" que el caos, pues existe una memoria colectiva. Por su generalidad, el formalismo se presta para modelar una gran variedad de sistemas fuera de equilibrio que evolucionan, se adaptan y se autoorganizan.³⁴ La potencialidad de este enfoque rebasa, por consiguiente, el contexto de las ciencias exactas para permitir adentrarnos en las ciencias sociales³⁵ y las humanidades.

Cabe mencionar que parte del éxito de este enfoque se debe a que existen registros de invariancias de escala para los cuales esta perspectiva resulta promisoría. Un caso particular es la relación de Gutenberg y Richter observada en la distribución de los terremotos de acuerdo con su magnitud, la que sigue una ley de potencia a lo largo de ocho décadas. El problema de las pilas de arena es esencialmente el de una dinámica de umbral (carga y descarga) con muchos grados de libertad. De manera análoga, en una falla geológica se van acumulando tensiones a lo largo del tiempo, que eventualmente generan fracturas, las que se pueden propagar en forma semejante a la de las avalanchas. Esta analogía ha generado una "avalancha" de investigaciones al respecto durante los últimos diez años.

De la turbulencia a los fósiles

A la turbulencia se la ha reconocido como el cementerio de los físicos teóricos. Más de una luminaria del gremio ha

³³ En general se observa un comportamiento $1/f^\alpha$ con $\alpha > 0$. En Schroeder (1991) se analizan varios casos.

³⁴ S. Kauffman (1995) propone una alternativa a la evolución darwiniana basada en el concepto de coevolución, que permite un proceso de adaptación con algunos paralelismos con la criticalidad autoorganizada.

³⁵ Véase el artículo "Complexity, contingency and criticality" (Bak, 1995) para una discusión sobre contingencias históricas en términos de criticalidad autoorganizada.

fracasado en sus intentos de comprenderla. Heisenberg, uno de los creadores de la mecánica cuántica, propuso una teoría para la turbulencia sin mucho éxito. Poincaré trabajó en hidrodinámica y dio cursos sobre vorticidad, pero nunca se aventuró a proponer una teoría de la turbulencia. Al recibir su premio Nobel, Feynman comentó que, como estudiante, le propusieron trabajar en electrodinámica cuántica o turbulencia, después de lo cual optó por la salida más fácil, esto es, la electrodinámica cuántica. Kenneth Wilson mencionó a mediados de los setenta que su principal motivación en el desarrollo del grupo de renormalización fue elaborar un formalismo para el estudio de la turbulencia, tarea que seguía inconclusa. No es de extrañar, por consiguiente, que nuestro propósito en estas líneas no sea procurar un entendimiento de la turbulencia, sino más bien establecer algunas analogías entre estudios realizados recientemente sobre turbulencia y su aplicabilidad al análisis de sedimentos lacustres.

En 1941, Kolmogorov propuso una teoría de escalamiento para la turbulencia basada en propiedades muy generales de isotropía y homogeneidad de flujos turbulentos. Una consecuencia de ese trabajo es la propuesta de que en cierto rango de valores de números de onda (rango inercial), el espectro de potencia de la energía se escala con el número de onda con potencia $-5/3$. Una imagen fenomenológica de la turbulencia propuesta por Richardson la ve como resultado de la coexistencia de remolinos anidados de todos los tamaños, muy al estilo de los dominios magnéticos de los fenómenos críticos que presentamos anteriormente,³⁶ y con una distribución que garantice que el volumen ocupado por cada tamaño de remolino es el mismo. En

³⁶ Un planteamiento reciente de las analogías entre turbulencia, teoría de campos y fenómenos críticos se encuentra en la referencia (Eyink, 1994).

esta imagen, el análisis de Kolmogorov conduce a que la energía en el fluido es transmitida a lo largo de la jerarquía de remolinos como una cascada y a una tasa constante. Sin embargo, se observan correcciones al escalamiento de Kolmogorov. Una de las explicaciones a esto se basa en el hecho de que las condiciones de homogeneidad e isotropía son alteradas por cadenas de vórtices que perturban el sistema en forma intermitente.³⁷ Bien, y ¿qué tiene que ver todo esto con sedimentos fósiles?

En el estado de Tlaxcala, en México, hace alrededor de un millón de años había una región lacustre inmersa en una de zona con mucha actividad volcánica. Estos paleolagos ya no existen, pero se tiene acceso a minas que se escarbaron con el propósito de extraer los sedimentos que contienen restos de algas lacustres depositados en el Plio-Pleistoceno. Se trata de yacimientos fósiles conformados por caparazones silíceos de diatomeas. Por sus características, estos sedimentos pueden ser utilizados como filtros muy finos y como aislantes térmicos, por lo que tienen interés industrial. Lo espectacular de estas minas es que al adentrarse en ellas se observan muros con patrones en forma de estratificaciones con alternancia entre depósitos de diatomitas (blancos) y depósitos de cenizas volcánicas y arcillas (oscuros). Se tiene así a la mano un catálogo único de la evolución de los paleolagos sujetos a perturbaciones volcánicas (Margalef, 1997). Los lagos tienen ciclos de vida en los que se dan procesos de autoorganización. Al medir la variación de la densidad de los sedimentos sobre transectos en bloques de diatomitas extraídos de las minas, se obtiene una serie espacial relacionada con el

³⁷ Recientemente, por medio de un análisis basado en cadenas de Markov (procesos estocásticos,) en el que estos comportamientos extraños son tomados en cuenta, se han logrado avances en el entendimiento de la correcciones al escalamiento, véase Ugalde (1996).

tiempo (Vilaclara, 1997), que —se demuestra— da lugar a un espectro de potencia que escala con varias pendientes sucesivas. Surge así la imagen de una evolución propia del lago, que imprime a la estructura de su población características de homogeneidad que son perturbadas por los eventos volcánicos.³⁸ Al analizar con las técnicas desarrolladas para la turbulencia los eventos extraños de las mediciones ecológicas (asociados con la actividad volcánica más violenta), resulta que se puede distinguir un rango de longitudes de onda que corresponde a procesos de relajamiento del lago ante la perturbación externa, que cae precisamente en la zona de escalamiento del espectro de potencia con pendiente de $-5/3$, ¡justamente la de Kolmogorov! ¿Será esto un indicio de una clase de universalidad fundamental? La pregunta queda abierta.

Orden y desorden: evolución, vida y conocimiento

¿Y por qué no? Entrémosle al toro por los cuernos con los complejos y sin complejos. Veamos algunos aspectos de la interrelación del desarrollo embriológico (ordenado y "confiable") y la evolución mutacional (desordenada y "azarosa"). Las controversias entre los biólogos del desarrollo y los evolucionistas darwinianos llevan varias décadas. El punto de partida es que se supone (y es verdad) que cada mutación genética implica cambios muy pequeños en el fenotipo.³⁹ Por ejemplo, no queda claro cómo un órgano tan complicado como el ojo de un vertebrado pudo

³⁸ En la analogía que estamos manejando, en lugar de cascadas con flujo de energía se contemplan cascadas con flujo de información, y en lugar de cadenas de vórtices se tienen las erupciones volcánicas.

³⁹ Entendemos por fenotipo las características observables de un organismo, determinadas por la interacción de su constitución genética con el entorno en que se desarrolla.

haberse formado evolutivamente por medio de una serie muy larga de mutaciones al azar. Si estas mutaciones tuviesen que explorar uniformemente *todo* el espacio fase mutacional⁴⁰ *potencialmente accesible*, el problema sería imposible, pues la probabilidad de llegar al resultado alcanzado en un tiempo finito sería prácticamente nula. Se necesitan mecanismos que limiten el espacio fase a explorar, de manera que la parte limitada incluya la zona prometedora, aquella con potencial de integrarse fácilmente a las estructuras y procesos del desarrollo embriológico ya presentes.

Una situación similar ocurre al considerar el origen de la vida, la evolución prebiótica y protobiótica. ¿Cómo se pudo pasar en tiempos "razonables" de compuestos inorgánicos y orgánicos relativamente sencillos, primero a moléculas orgánicas complicadas —como son los polímeros biológicos— y posteriormente a células? Si ello fuese fruto del azar, con pocas restricciones, no alcanzaría el tiempo. Esto se volvería aún más difícil para "escenarios fríos", en donde se supone que algunas de las etapas de la evolución prebiótica habrían tenido lugar a temperaturas muy bajas, en el medio interestelar y en cometas. A esas temperaturas la probabilidad de colisiones térmicas se reduce drásticamente con relación a la de nuestro medio ambiente y la probabilidad de que ocurran síntesis complejas es sumamente baja.

Veamos algunos de los mecanismos de restricción del espacio fase efectivo que se presentan tanto en la evolución prebiótica y protobiótica como en la evolución y funcionamiento de los organismos vivos; es decir, mecanismos que disminuyen drásticamente el tamaño del espacio fase efectivo en que se busca, y que aumentan con ello la pro-

⁴⁰ Aquí consideramos la evolución como un sistema dinámico para el cual el espacio fase corresponde a todas las posibles realizaciones genéticas.

babilidad de asimilación de lo hallado a las estructuras previas. Un punto de partida es reducir las dimensiones del espacio físico en el que se dan los procesos biológicos; por ejemplo, se puede considerar a la célula como un recipiente microscópico de volumen muy pequeño, donde ocurre un conjunto de reacciones químicas más o menos complejas que serían la base de la vida. A pesar de lo pequeño del volumen celular, la probabilidad de que, por choques azarosos entre moléculas, ese conjunto de reacciones tenga lugar con velocidad suficientemente grande a la temperatura ambiente, es prácticamente nula. "Vienen en ayuda" las enzimas, catalizadores biológicos que aceleran reacciones químicas específicas a la temperatura ambiente. Las enzimas son superficies inhomogéneas sobre las cuales tienen lugar reacciones químicas que cuentan con zonas en las que —debido a fuerzas de Van der Waals (fuerzas atractivas de alcance molecular)— los sustratos se acomodan en regiones específicas cercanas, para lo cual llegan incluso a deformarse. Con la proximidad, las reacciones entre dichos sustratos se aceleran. Vemos, pues, que las enzimas disminuyen el espacio efectivo de tres dimensiones (volumen) a dos dimensiones (superficie). La inhomogeneidad de las superficies propicia que haya zonas en que la probabilidad de encontrar los sustratos sea muy grande, con lo cual se tienen restricciones adicionales a la bidimensionalidad de la superficie de las enzimas. Sin embargo, ésta no es toda la historia, pues procesos celulares importantes tienen lugar en espacios aún más restringidos. Tal es el caso de la replicación y transcripción genéticas, así como el de la síntesis de proteínas en el ribosoma celular, donde se trata de procesos básicamente cuasi unidimensionales que tienen lugar a lo largo de un canal o filamento y que, además, son en general unidireccionales. Para estos procesos operan "máquinas" que transfieren materia, energía e información en escalas moleculares. A las temperaturas a que tienen lugar los pro-

cesos biológicos en la Tierra, las fluctuaciones térmicas son importantes, por lo que se dice que trabajan en el régimen browniano.⁴¹ Aparecen así máquinas moleculares, para las que consideraciones tanto mecánicas como termodinámicas son importantes, que trabajan a lo largo de espacios cuasi unidimensionales, en general de modo unidireccional.

Existen teorías de la evolución prebiótica y protobiótica en las que algunos de los procesos fundamentales tendrían lugar en escenarios extraterrestres, como el medio interestelar o en cometas, a lo largo de filamentos y canales microscópicos, presentes en ambos casos. Dado que en esos cuerpos las temperaturas son muy bajas (alrededor de los 10°K), en tales escenarios la mecánica y el electromagnetismo (por ejemplo, "motores" impulsados por radiación electromagnética polarizada de pulsares) son fundamentales, mientras que la termodinámica desempeña un papel secundario.

Un rasgo interesante de la fisicoquímica de la dinámica de polímeros biológicos, tales como las proteínas y los ácidos nucleicos, es que, a temperatura ambiental y en solución acuosa, la contribución energética de la entropía casi cancela la de la entalpía,⁴² por lo que están en condiciones características de una zona crítica (fluctuaciones con bajo costo energético) que permite flexibilidad y facilidad de asociación y disociación (Petruska, 1995). Al constreñir el polímero en la superficie de una enzima en

⁴¹ Recientemente el estudio de las nanomáquinas ha recibido especial atención principalmente por su relevancia en la biología y en la electrónica. En el llamado régimen browniano (Magnasco, 1993), las fluctuaciones térmicas contribuyen al transporte de la máquina (no pueden tratadas como una pequeña perturbación) cuando existe una fuente de asimetría en el problema (por ejemplo, en un potencial o en un forzamiento).

⁴² La entropía es una medida del grado de desorden del sistema; la entalpía en este caso es una energía de amarre entre moléculas.

procesos como la replicación, la reducción dimensional disminuye la contribución entrópica, y la entalpía de enlace se vuelve dominante, por lo que los procesos de apareamiento se vuelven más precisos. Vemos entonces que las restricciones espaciales también intervienen en la mejora de aspectos funcionales.

Otro aspecto de la interrelación entre el desarrollo embrionario y la evolución genética está asociado con los llamados genes homeóticos, para los cuales una mutación puede ocasionar modificaciones drásticas, como el que una mosca tenga una pata o un ala en el lugar donde debiera localizarse una antena. Se ha observado un alto grado de universalidad en muchos de estos genes, ya que están presentes en organismos tan diversos como la mosca o el hombre, pero con funciones muy similares, aunque en general no idénticas. Este comportamiento sugiere la presencia de procesos modulares asociados a estos genes, y que el modo de montaje y la sincronización temporal son factores importantes en muchos de los aspectos del desarrollo embrionario. Por lo que tal "montaje modular" puede verse como otro mecanismo para reducir el espacio fase efectivo en que tiene lugar la evolución biológica. Vale la pena hacer notar que, asociado a lo anterior, actualmente existe la confianza de que se está cerca de una síntesis de las dinámicas del desarrollo embrionario y de la evolución, al grado que se ha acuñado el término *evo-devo* (Pennisi, 1997), de las primeras sílabas de las palabras inglesas *evolution* (evolución) y *development* (desarrollo).

Todo lo anterior sugiere que la naturaleza no es un artífice inteligente y genial que dispone de un número infinito de posibilidades para realizar obras de arte biológicas casi perfectas; sino más bien dispone de un número limitado de herramientas y métodos, está sujeta a muchas restricciones y resuelve los problemas como buenamente puede, combinando de modo adecuado lo que tiene. Quizá la presencia de tales limitaciones haga que la vida sea más

fácil de comprender que lo que parecería a primera vista, aunque es de admirar que con tales restricciones la evolución biológica haya sido capaz de llegar a algo tan complejo como es el cerebro humano.

Otro aspecto que guarda relación con lo anterior y que vale la pena comentar es la importancia de la asimilación del desorden al orden en el aprendizaje. La búsqueda de cosas y aspectos nuevos es en general desordenada y sorpresiva, aunque lo nuevo debe tener la posibilidad de asimilarse a las estructuras y estrategias presentes (algo similar a la integración armónica de las fluctuaciones mutacionales en los procesos dinámicos del desarrollo embrionario). Como comenta Asimov (1993), el perro es más inteligente que el gato: "El perro, en sus momentos de ocio, olfatea acá y allá, elevando sus orejas al captar sonidos que nosotros no somos capaces de percibir; y precisamente por esto lo consideramos más inteligente que el gato, el cual, en las mismas circunstancias, se entrega a su aseo, o bien se relaja, se estira a su talante o dormita." ¡Guau! Es precisamente en la curiosidad y capacidad de asombro, asociado a una dosis de escepticismo, y la capacidad de poner a prueba lo que ese asombro sugiere, donde, según Carl Sagan (1998), debemos buscar el fundamento de la ciencia.

Henri Atlan también ha discutido aspectos de la "asimilación armónica" del orden y el desorden por el cerebro humano. En su enfoque (Atlan, 1990) el consciente sería básicamente una base de datos ordenada, mientras que el inconsciente —que operaría de modo desordenado— sería el principal responsable de la creación, siendo fundamental el equilibrio entre los dos aspectos. Este equilibrio permitiría la asimilación de lo encontrado por el inconsciente desordenado y creador, a las metodologías y bases de datos asociadas al consciente. Aunque se trata de un enfoque que habría que analizar críticamente, es una muestra del potencial que contiene el estudio de los sistemas complejos en diversas áreas.

REFLEXIONES

Durante las últimas dos décadas se han roto barreras y abierto horizontes del conocimiento. Las metodologías, los formalismos y las técnicas desarrolladas permiten abordar situaciones previamente prohibitivas. Del equilibrio se transita al cambio continuo y la adaptación se integra a la evolución. Experiencias disímiles, de ámbitos ajenos, se entrelazan en una cruzada interdisciplinaria. Apertura y convergencia se funden. Se gesta otra forma de hacer ciencia. Baluartes del conocimiento como la evolución darwiniana y la relojería newtoniana son nuevamente cuestionados y reconsiderados. Contraposiciones que regularmente asaltan la historia vuelven a un ruedo de debate intenso: localidad-globalidad, cantidad-cualidad, mecanismo-proceso, determinismo-azar.

En este torbellino de acontecimientos se presenta, a nuestro parecer, un reto fundamental: la consecución de la *síntesis* entre lo particular y lo genérico, la conformación de un escenario para el encuentro entre mecanismos particulares, reflejos del detalle, y procesos regidos por principios y leyes genéricas. En el pasado, situaciones de esta naturaleza han forjado puentes, como es la mecánica estadística. Ahora, el planteamiento trasciende la comunidad científica, al ser de interés directo y de consecuencia inmediata para amplios sectores de la sociedad.

¿Será que con el estudio de los sistemas complejos nos adentramos a una "superrevolución del conocimiento"? ¿Será que nos encontramos ante un cambio de paradigma equivalente al que tuvo lugar en el Renacimiento? Dejemos que eso lo decida la historia. Y, por lo pronto, volvamos al inicio de este escrito y disfrutemos.

Estamos ante la posibilidad de asomarnos a la filosofía natural de otros tiempos, ahora con la visión de nuestros tiempos. Nos encontramos al borde del milenio, en el umbral de la *gran aventura*.

AGRADECIMIENTOS

Ante todo queremos expresar un múltiple agradecimiento a Luis de la Peña, por habernos dado la oportunidad de participar en esta colección, por haber leído con detenimiento el manuscrito y compartido con nosotros sus puntos de vista que mejoraron sustancialmente el texto, y por último, por haber desplegado una paciencia y perseverancia loable que permitió que este trabajo pasara a ser una realidad. También estamos en deuda con Maximino Aldana y Gloria Vilaclara, quienes en una demostración de amistad, revisaron, comentaron e enriquecieron el manuscrito con sus atinados comentarios y sugerencias. Por supuesto, el contenido de lo expuesto es responsabilidad nuestra.⁴³

⁴³ Para cualquier queja sobre el decrepito sentido del humor, favor de dirigirse a G.M.M.

BIBLIOGRAFÍA

- Arthur, B. (1990), "Positive feedbacks in the economy", *Scientific American*, pp. 80-85.
- Asimov, I. (1993), *Nueva guía de la ciencia. Ciencias físicas*, Barcelona, RBA Editores, p. 662.
- Atlan, H. (1990), *Entre el cristal y el humo: ensayo sobre la organización de lo vivo*, Madrid, Debate, p. 303.
- Badii, R., y A. Politi (1997), *Complexity, hierarchical structures and scaling in physics*, Cambridge, Cambridge University Press, p. 318.
- Bak, P., C. Tang y K. Wiesenfeld (1987), "Self-organized criticality. An explanation of $1/f$ noise", *Physical Review Letters*, vol. 59, p. 381.
- , y M. Paczuski (1995), "Complexity, contingency, and criticality", *Proceedings of the National Academy of Science*, vol. 92, pp. 6689-6696.
- Barrow-Green, J. (1997), "Poincaré and the three body problem", *History of Mathematics*, vol. 11, American Mathematical Society y London Mathematical Society.
- Bricmont, J. (1996), "Science of chaos or chaos in science?", *Annals of the New York Academy of Science*, vol. 775, pp. 131-175.
- Briggs, J., y F. D. Peat (1990), *Espejo y reflejo: del caos al desorden*, Barcelona, Gedisa, p. 222.
- De Gennes, P-G. (1979), *Scaling concepts in polymer physics*, Nueva York, Ithaca, Cornell University Press, p. 324.
- Diacu, F., y P. Holmes (1996), *Celestial encounters: The origins of chaos and stability*, Princeton, Princeton University Press.
- Ditto, W.L., y L. M. Pecora (1993), "Mastering chaos", *Scientific American*, pp. 78-84.
- Eyink, G., y N. Goldenfeld (1994), "Analogies between scaling in turbulence, field theory and critical phenomena", *Physical Review E*, vol. 50, p. 4676.
- Feigenbaum, M. J. (1978), "Quantitative universality for a class of non-linear transformation", *Journal of Statistical Physics*, vol. 19, p. 25.
- Gell-Mann, M. (1992), "Complexity and complex adaptive systems", J. Hawkins y M. Gell-Mann (coords.), *The evolution of human languages. SFI Studies in the Sciences of Complexity, Proceedings*, vol. 10, Reading Mass, Addison-Wesley, pp. 3-18.
- Glansdorff, P., e I. Prigogine (1971), *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*, Londres, Wiley-Interscience, p. 306.
- Gleick, J. (1987), *Chaos: Making a new science*, Nueva York, Viking Penguin Inc., p. 352.
- Grassberger, P. (1991), "Randomness, information and complexity", F. Ramos-Gómez (coord.), *Proceedings of the Fifth Mexican School on Statistical Physics*, Singapur, World Scientific, pp. 57-99.

- Haken, H. (1978), *Synergetics, an introduction*, Berlín, Springer-Verlag, p. 355.
- Kadanoff, L. P. (1991), "Complex structures from simple systems", *Physics Today*, vol. 44, núm. 3, p. 9.
- Kauffman, S. (1995), *At home in the universe. The search for the laws of self-organization and complexity*, Oxford, Oxford University Press.
- Kellert, S. H. (1993), *In the wake of chaos*, Chicago, Chicago University Press, p. 176.
- Lorenz, E. (1963), "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 20, pp. 130-141.
- Magnasco, M. (1993), "Forced thermal ratchets", *Physical Review Letters*, vol. 71, pp. 1477-1481.
- Mandelbrot, B.B. (1977), *Fractals, form, chance and dimension*, San Francisco, W.H. Freeman and Company, p. 365.
- Margalef, R. (1997), "Our Biosphere", *Excellence in Ecology*, vol. 10, Ecology Institute, Alemania, Oldendorf-Luhe, 176.
- Martínez Mekler, G. (1981), "Polímeros, un tema de confluencia en la física", *Ciencias Revista de Difusión*, UNAM, vol. 4, p. 18.
- (1993), "Dinámica y estructura de sistemas complejos", en L. García-Colín, F. Ramos Gómez y R. Rechtman (coords.), *Temas Selectos de Física Estadística*, México, El Colegio Nacional, pp. 141-227.
- May, R. (1976), "Simple mathematical models with very complicated dynamics", *Nature*, vol. 261, pp. 459-467.
- Oono, Y. (1998), "Complex systems study as biology", *International Journal of Modern Physics B* (en prensa).
- Pennisi, E., y R. Wade (1997), "Developing a new view of evolution", *Science*, vol. 277, pp. 34-37.
- Peterson, I. (1993), *Newton's clock: Chaos in the solar system*, Nueva York, W.H. Freeman.
- Petruska, J., y M. F. Goodman (1995), "Enthalpy-entropy compensation in DNA melting thermodynamics", *The Journal of Biological Chemistry*, vol. 270, pp. 746-750.
- Poincaré, H. (1909), *Science et méthode*, París, E. Flammarion, p. 314 (trad. al español: Espasa-Calpe).
- (1991), *Chance and chaos*, Princeton, Princeton University Press, p. 195.
- Ruelle, D., y F. Takens (1971), "On the nature of turbulence", *Communications in Mathematical Physics*, vol. 20, pp. 167-192.
- Sagan, C. (1998), *El mundo y sus demonios*, México, Planeta.
- Schroeder, M. (1991), *Fractals, chaos, power laws: minutes from an infinite paradise*, Nueva York, W.H. Freeman, pp. 429.
- Shinbrot, T., C. Grebogi, E. Ott y J.A. Yorke (1993a), "Using small perturbations to control chaos", *Nature*, vol. 363, pp. 411-417.

- (1993b), "Chaos: unpredictable yet controllable?", *Nonlinear Science Today*, vol. 3, núm. 2, pp. 1-8.
- Smale, S. (1967), "Differentiable Dynamical Systems", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 73, pp. 747-817.
- Tresser, C., y P. Couillet (1978), "Itérations d'endomorphisme et groupe de renormalisation", *Compte-rendus de l'Academie des Sciences de Paris*, vol. A287, p. 577.
- Ugalde, E. (1996), "Self-similarity and finite-time intermittent effects in turbulent sequences", *Journal of Physics A*, vol. 29, pp. 4425-4443.
- Vilaclara, G. (1997), *Registro de erupciones volcánicas en las diatomitas lacustres de Tlaxcala, México*, tesis de doctorado en ciencias biológicas, España, Universidad de Barcelona, Facultad de Biología.
- Weigend, A. S., y N.A. Gershenfeld (1993), "Time series prediction: Forecasting the future and understanding the past", *SFI Studies in the Sciences of Complexity, Proceedings*, vol. 15, Reading, Mass., Addison-Wesley, p. 643.
- Weinberg, S. (1992), *Dreams of a final theory*, Nueva York, Pantheon Books, p. 334.
- Wilson, K. (1979), "Problems in physics with many scales of length", *Scientific American*, vol. 241, agosto, p. 158.

LECTURAS RECOMENDADAS

A continuación se da una lista de textos y libros de divulgación con algunos comentarios.

Caos y sistemas dinámicos

- Baker, G. L., y J.P. Gollub (1990), *Chaotic Dynamics*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Bergé, P., Y. Pomeau y Ch. Vidal (1988), *L'ordre dans le chaos*, París, Hermann.
- Briggs, J., y F. D. Peat (1990), *Espejo y reflejo: del caos al desorden*, Barcelona, Gedisa.
- Davies, P. D. (1989), *The new physics*, Cambridge, Cambridge University Press (variedad de temas).
- Gleick, J. (1994), *Caos - La creación de una ciencia*, Barcelona, Seix Barral, p. 358 (periodismo científico de excelencia).
- Jackson, A. E. (1989), *Perspectives of nonlinear dynamics*, vol. 1, Cambridge, Cambridge University Press, p. 633.
- (1991), *Perspectives of nonlinear dynamics*, vol. 2, Cambridge, Cambridge University Press.
- Kaplan, D., y L. Glass (1995), *Understanding nonlinear dynamics*, Nueva York, Springer-Verlag, p. 420. (Texto orientado a biólogos.)

Kellert, S. H. (1993), *In the wake of chaos*, Chicago, Chicago University Press, p. 176. (Tratamiento histórico-filosófico.)

Lorenz, E. N. (1995), *La esencia del caos*, Madrid, Debate, p. 232.

Stewart, I. (1989), *Does God play dice?*, Cambridge, Blackwell, p. 348.

Sistemas complejos

Bak, P. (1996), *How nature works: the science of self-organized criticality*, Nueva York, Copernicus.

Gell-Mann, M. (1995), *El quark y el jaguar*, Colección Matemáticas, Barcelona, Tusquets, p. 413.

Goldberg, D. E. (1989), *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*, Addison-Reading Mass, Wesley Publishing Co., p. 412.

Goodwin, B. (1994), *How the leopard changed its spots. The evolution of complexity*, Nueva York, Touchstone.

Kauffman, S. (1995), *At home in the universe. The search for the laws of self-organization and complexity*, Oxford, Oxford University Press.

Otros temas

Atlan, H. (1990), *Entre el cristal y el humo: ensayo sobre la organización de lo vivo*, Madrid, Debate, p. 303.

Sagan, C. (1998), *El mundo y sus demonios*, México, Planeta.

En la colección La Ciencia desde México, Fondo de Cultura Económica:

Braun, E. (1996), *Caos, fractales y cosas raras*, núm. 150.

Schifter, I. (1996), *La Ciencia del Caos*, núm. 142.

Talanquer, V. (1996), *Fractus, Fracta, Fractal. Fractales, de laberintos y espejos*, núm. 147.

Artículos en revistas

Ciencia y Desarrollo, Martínez, R., y R. Bulajich (1993), "Caos: memoria antigua, realidad moderna", Conacyt.

Ciencias, Revista de Difusión, González, H., y H. Arce (1996), "El caos, un intento por dar sentido a la realidad", UNAM, vol. 43, p. 4.

———, Esteva, L. (1986), "Matemáticas y caos", UNAM, vol. 8, p. 8.

———, Martínez Mekler, G. (1981), "Polímeros, un tema de confluencia en la física", UNAM, vol. 4, p. 18.

———, Rechtman, R. (1991), "Autómatas celulares: una introducción", UNAM, vol. 24, p. 23.

Mundo Científico, "La ciencia del caos", vol. 11, núm 115 (número especial dedicado al caos).

Physics Today, Anderson, P.W. (1991), "Is complexity physics? Is it science? What is it?", vol. 44, p. 9.

- , Chernikov, A. A., R. Z. Sadeev y G. M. Zaslavsky (1988), "Chaos: How regular can it be?", vol. 41, p. 27.
- , Ford, J. (1983), "How random is a coin toss?", vol. 36, p. 40.
- , Hopfield, J. (1994), "Neurons, dynamics and computation", pp. 40-46.
- , Kadanoff (1983), "Roads to chaos", vol. 36, p. 46.
- Revista de la UNAM*, Pérez Pascual, R. (1989), "El caos determinista: los límites de la predicción científica", vol. 44, p. 19.
- (1996), "El caos: objeto de la ciencia", vol. 540 (número centrado en el tema del caos).
- Scientific American*,* Arthur, B. (1990), "Positive feedbacks in the economy", pp. 80-85.
- , Bak, P. y K. Chen (1991), "Self organized criticality", pp. 26-33.
- , Crutchfield, P., J.D. Farmer, N.H. Packard y R. Shaw, (1986), "Chaos", vol. 225, p. 38.
- , Holland, J. H. (1992), "Genetic Algorithms", julio de 1992, pp. 44-50.
- , Kauffman, S. (1991), "Antichaos and adaptation", vol. 230, p. 64.
- , Solé, V., J. Bascompte, J. Delgado, B. Luque y S. Manrubia (1996), "Complejidad en la frontera del caos", núm 236, pp. 14-21.

- , Wilson, K. (1979), "Problems in physics with many scales of length", vol. 241, p. 158.

Existen varias series especializadas de libros sobre el tema. Entre ellas podemos citar:

Springer Series in Synergetics, Berlín (1976 en adelante).

Santa Fe Institute, Studies in the Sciences of Complexity, California, Redwood, Addison-Wesley, Lectures volumes (1989 en adelante).

———, Lecture notes volumes (1990 en adelante).

———, Reference volumes (1992 en adelante).

———, Proceedings volumes (1990 en adelante).

* Los artículos en inglés aparecen tres meses después en su versión en español en la revista *Investigación y Ciencia*.

Al borde del milenio: caos, crisis, complejidad, de Gustavo Martínez Mekler y Germinal Cocho, terminó de formarse e imprimirse en la ciudad de México, durante abril de 1999, en los talleres de Signum Editores, S.A. de C.V., Calzada del Hueso 140, Col. Ex-hacienda de Coapa. Se tiraron 500 ejemplares sobre papel bond de 72 grs. y en su composición se utilizaron tipos Optima de 12, 10, 9 y 8 puntos. La corrección de estilo y lectura de pruebas estuvo a cargo de Rogelio López Torres.